

## **COMPETÈNCIA MATEMÀTICA I DIGITAL: aplicacions pràctiques dels conjunts de Voronoi**

**Martha Ivón Cárdenas  
Daniel López**

### **Objectius**

Aquest projecte inicia als alumnes de l'ESO a l'estudi dels conjunts de Voronoi, mitjançant els quals els hi ajudi a desenvolupar la matemàtica computacional contextualitzada, a desenvolupar la representació gràfica i l'expressió simbòlica, a la utilització de diferents eines informàtiques, com a estratègia integradora i d'aprenentatge de diferents conceptes matemàtics que es treballen normalment en tres blocs separats (*Geometria, Resolució de Problemes i Probabilitat i Estadística*), i també, a estudiar l'aplicació d'aquests diagrames a casos pràctics, tot desenvolupant competències bàsiques tals com: les competències comunicatives i lingüístiques, aprendre l'ús d'eines i aplicacions informàtiques, el tractament de la informació i competència digital, la competència matemàtica, la competència d'aprendre a aprendre, l'autonomia i iniciativa personal i el coneixement i interacció amb el món físic. Totes aquestes competències que cal assolir permetran que l'alumnat integri els aprenentatges relacionats amb els conjunts de Voronoi i que s'hi pugui estudiar mitjançant aplicacions informàtiques la seva aplicació de manera efectiva en situacions i contextos reals. Com a resultat, es pretén potenciar el treball cooperatiu com una metodologia que permet ensenyar i avaluar per competències.

Les activitats dissenyades en aquest projecte tenen una finalitat clara i amb un sentit i uns continguts significatius per al nostre alumnat, i on ells han de resoldre una situació diferent amb cada activitat que els farà actuar de manera conscient, crítica i responsable.

### **Desenvolupament**

Aquest projecte està integrat dins d'un curs de Moodle de l'Institut. Els alumnes amb els quals s'ha realitzat l'activitat, tenen un nivell de 4t de l'ESO. Aquesta activitat es va portar a terme durant el segon trimestre, durant les sessions que formen part del bloc de Geometria.

#### Fase teòrica:

El concepte bàsic dels diagrames de Voronoi, explica la relació de conèixer la influència que realitzen determinats elements d'un conjunt sobre la resta dels elements del mateix i la partició d'un àrea d'acord al principi del veí més proper. Es per això, que a la fase teòrica del projecte, per tal de poder entendre el concepte de diagrama o conjunt de Voronoi es van associar conceptes bàsics relacionats com ara la proximitat, la pertinença i la proporció directa entre tots dos conceptes. A més, es va relacionar amb d'altres conceptes matemàtics coneguts per l'alumne: espai, regió, distància, mètrica, mediatriu, punt, objecte, àrea etc. Després, es va realitzar una breu recerca bibliogràfica de l'autor d'aquests conjunts, el matemàtic rus Georgy Voronoi, i d'esdeveniments investigats per altres científics relacionats amb aquests diagrames fins i tot abans de ser descoberts per Voronoi.

Finalment en aquesta fase, s'han familiaritzat amb les eines informàtiques utilitzades durant el projecte que es detallen més endavant a l'apartat de la fase pràctica.

#### Fase pràctica:

A la fase experimental, abans d'utilitzar les eines informàtiques, els alumnes van analitzar el món d'aplicacions pràctiques possibles que tenien aquests diagrames: la localització d'hospitals; el manteniment d'antenes mòbils; el traçat de camins rurals respectant l'ecosistema; l'elaboració d'una xarxa local futurista intercentres de les escoles que utilitzen el Moodle com a plataforma educativa; pel que fa a l'economia, la reducció de costos de transport de mercaderies; la geolocalització i les

trajectòries entre planetes; el cos de bombers poden traçar un camí de seguretat forestal; els especialistes en estudi de mercat poden dissenyar un pla de màrketing; al pilotatge d'helicòpters eficient suposa un important estalvi de combustible; l'estudi de la localització dels centres escolars més propers a les poblacions i urbanitzacions; l'estudi de l'impacte de les emissions de CO<sub>2</sub> dels cotxes als boscos propers a les autopistes; gestió eficient d'un servei emergències; la reducció de l'impacte mediambiental de les plantes de residus properes a les zones poblades, etc. També, pel que fa a la naturalesa, es podria controlar millor la fauna i la vegetació autòctona protegida així com els seus punts de concentració i la seva epidemiologia; l'optimització de rutes en entorns ambientals protegits. A climatologia, es podria calcular la precipitació per dia i per estació de l'any, millorant les prediccions meteorològiques.

Una vegada estaven seleccionades les aplicacions més importants, els alumnes van realitzar pràctiques amb el Geogebra de mosaics i tesel·lacions: van analitzar les característiques i propietats de les formes geomètriques de dues i tres dimensions, desenvolupant relacions geomètriques que els hi ha permès investigar, descriure i raonar sobre els resultats de subdividir, combinar i transformar formes. També, van aplicar transformacions i utilitzar simetria per analitzar situacions matemàtiques tals com predir i descriure els resultats de lliscar, voltejar i girar formes bidimensionals. Van reconèixer idees i relacions geomètriques relacionades amb altres disciplines i altres problemes que sorgeixen a classe o en la vida diària.

A continuació es detalla el seguit d'activitats pràctiques realitzades.

(Activitat 1: El Maresme en mapes)

Els alumnes van utilitzar el programari lliure anomenat Geogebra per a aplicar els diagrames de Voronoi als mapes geogràfics de Catalunya:

<http://mapes-maresme.ccmarsme.es/mapes.html>.

Dins de l'apartat de l'àmbit físic, van estudiar els mapes relacionats amb el relleu, la geologia, la hidrografia i el clima. Dins de l'apartat de l'àmbit mediambiental, els alumnes van analitzar els diagrames de Voronoi aplicats als mapes dels boscos, fauna, espais naturals protegits, tractament de residus sòlids, abastament d'aigua i el tractament d'aigües residuals. Pel que fa a de l'apartat de l'àmbit socioeconòmic, els alumnes van estudiar els mapes d'articulació dels territoris (comparació de la influència que exerceix Mataró sobre la resta de municipis comarcals); els mapes d'explotació forestal, d'agricultura i pesca, de població, d'activitat econòmica i les comunicacions viàries. Finalment, dins de l'apartat històricocultural, els alumnes van estudiar els mapes de poblament prehistòric, ibèric i romà; el mapa de l'època medieval, el mapa de les torres de guaita i el mapa de l'arquitectura modernista.

(Activitat 2: tastet de programari de Diagrames de Voronoi)

Una vegada els alumnes van analitzar tots els mapes, es van utilitzar diferents programaris lliures i de fàcil utilització:

- "Google Planimeter", una aplicació gratuïta de Google que també calcula àrees.
- "Vorest", una aplicació gratuïta que utilitza el diagrama de Voronoi com a eina d'investigació forestal per analitzar i predir la influència de l'espai ocupat pels arbres en l'evolució d'un bosc.
- "VORO3D", és una aplicació que permet la visualització en tres dimensions de la estructura de les proteïnes.
- "RATM", és un applet que permet simular la relocalització d'antenes per a la millora d'una xarxa de telefonia mòbil.
- "Voronoi Google Maps", és una aplicació japonesa que permet dibuixar diagrames de Voronoi directament en el Google Maps.

(Activitat 3: Gestió de telefonia mòbil)

Aquesta activitat es va plantejar als alumnes com a un problema geomètric de distribució d'estacions base de telefonia mòbil en un espai bidimensional. Per mitjà del Geogebra i un mapa del municipi de Palafolls, es va suposar que els usuaris de telèfon mòbil estaven distribuïts de forma uniforme en una zoa d'aquest mapa. Els alumnes havien de considerar que la clau del problema era que cada telèfon mòbil es connecta per radi amb l'antena més propera al lloc on es troba. A més, havien de tenir en compte que cada antena tenia assignada una regió del plànol a la qual prestava el servei. A més, havien d'analitzar com eren aquestes regions i com quedava descompost el plànol en funció de la posició de l'antena que s'encarregava de la cobertura.

(Activitat 4: Disseny del camí segur d'un oleoducte)

Els alumnes han de fixar els punts més poblats d'un mapa i dissenyar mitjançant el Geogebra un possible oleoducte de forma segura. Aquest camí segur havia de maximitzar la distància fins als punts en qualsevol dels punts de la seva trajectòria, fent créixer cercles al voltant dels punts (al mateix temps des de tots els punts) els quals representaven les zones segures per les quals no podia passar el camí. A mesura que creixen els cercles es veu que el camí es restringeix i es fa més poligonal. Quan els cercles s'ajunten o es topen amb el límit del rectangle es formen segments de línia que són les mediatris dels punts sobre els quals s'han fet créixer els cercles. En el límit els segments formen un diagrama de Voronoi i un conjunt d'ells representen cadascun dels camins possibles que es poden dissenyar.

(Activitat 5: Voronoi 3D)

Els alumnes van experimentar amb l'aplicació Fracture Voronoi, la qual simula el trencament de qualsevol cos geomètric preservant el seu volum:

<http://www.scriptspot.com/3ds-max/scripts/fracture-voronoi>

També, van experimentar amb models de Voronoi creats amb el Google SketchUp, una aplicació gratuïta en 3D de Google.

(Activitat 6: Distribució de centres escolars en una ciutat)

Es planteja als alumnes el següent problema:

En una ciutat existeixen 5 col·legis. A quina escola han d'anar els alumnes dels diferents barris de la ciutat si el que es desitja és que vagin al col·legi més proper al seu habitatge?

Per resoldre aquest problema, anem a considerar primer un cas més senzill, amb sol 3 punts.

Considerem 3 punts en els plànols A, B i C. La regió de Voronoi d'un d'ells és la part del plànol més propera a ell que als altres punts de partida. Calculem la regió de Voronoi corresponent al punt A.

En una plantilla, per parelles, els alumnes haurn de realitzar de forma iterativa aquests pasos:

- Primer pas:  
Tracem la mediatriu del segment AB. Ens quedem amb el semiplà dels punts més propers a A que a B.
- Segon pas:  
Tracem la mediatriu del segment AC. Ens quedem amb el semiplà dels punts més propers a A que a C.
- Tercer pas:  
La intersecció dels 2 semiplans seleccionats és la regió de Voronoi del punt A.
- Quart pas:  
Repeteix el procés amb els punts B i C i obtindràs les tres regions de Voronoi.

(Activitat 7: Planta de residus químics a Catalunya)

Considerem el problema de la instal·lació d'una planta de residus químics a Catalunya. Es tracta d'una instal·lació que comporta un risc i suposa un perill evident per a la població en cas d'accident.

Evidentment, ningú vol una instal·lació d'aquests tipus en la seva proximitat. Les autoritats responsables decideixen que la seva localització geogràfica ha de ser el més allunyada possible de qualsevol nucli urbà la població del qual no pot superar els 30 mil habitants. Malgrat això, per motius logístics, la seva construcció no es pot situar a zones massa allunyades de la civilització, ja que els costos de les infraestructures serien insostenibles. El problema consisteix en trobar una localització geogràfica adient a la instal·lació.

Els aspectes a discutir per part dels alumnes del problema són els següents:

- Hem de localitzar els nuclis urbans de més de 30 mil habitants i hem de buscar una localització que es trobi el més allunyada d'ells, però al seu torn que no es trobi aïllada d'aquests nuclis urbans per raons de comunicacions.
- Des del punt de vista geomètric, cal localitzar el centre d'un cercle el radi del qual sigui el més gran possible, de manera que no inclogui en el seu interior cap punt del conjunt que formen els municipis amb més de 30 mil habitants.
- Per les propietats dels diagrames de Voronoi, sembla raonable buscar com a centre d'aquest cercle màxim algun dels vèrtexs de les regions de Voronoi, ja que els punts de les arestes equidisten dels punts veïns generadors del diagrama. No obstant això, cal tenir en compte també els punts d'intersecció de l'envolupant convexa amb les arestes de les regions de Voronoi. Així, els candidats a ser centre són vèrtexs de Voronoi, punts d'intersecció de les arestes de Voronoi i l'envolvent convexa.

Les activitats proposades amb Geogebra per tal de resoldre el problema van ser:

1. Esbrinar els municipis de Catalunya amb més de 30 mil habitants (cens el més actualitzat possible)
2. Situar en el mapa cadascun d'aquests municipis amb un punt, considerant Barcelona i la seva àrea metropolitana un únic punt.
3. Dibuixar el diagrama de Voronoi d'aquest conjunt de punts.
4. Dibuixar l'envolvent convexa d'aquest conjunt de punts.
5. Calcular la intersecció de les arestes del diagrama de Voronoi amb l'envolvent convexa.
6. Determinar d'entre tots els candidats al centre del cercle buit màxim, aquell que produeix el cercle de major ràdio

(Activitat 8: Scratch i diagrames de Voronoi)

Els alumnes va dissenyar un generador de diagrames de Voronoi a partir d'un ja fet i publicat:

<http://scratch.mit.edu/projects/zdestefano70/2635274>

Les instruccions de Geogebra més utilitzades són: *ArbolRecubrimientoMínimo*[lista de punts], *CierreConvexo*[lista de punts], *Voronoi*[lista de punts], *Delaunay*[lista de punts].

Els continguts curriculars relacionats són: llocs geomètrics d'un triangle, rectes, punts, àrees de polígons, resolució de problemes, circumferències i les corbes.

## Avaluació

A partir de l'observació realitzada a cada alumne, es van aplicar els ítems que es detallen a continuació per tal de realitzar l'avaluació del projecte:

### *Criteris de Planificació i Disseny*

1. Creativitat i Disseny.
2. Ús dels recursos (eines, materials i fonts d'informació).
3. Competència digital (aplicacions informàtiques). *Criteris d'Organització*
4. Autonomia personal.
5. Organització de l'activitat de forma lògica. *Criteris Conceptuals*
6. Coneixement dels conceptes matemàtics relacionats més elementals.
7. Coneixement dels conceptes matemàtics relacionats de més dificultat. *Criteris d'Interacció*

8. Comunicació oral (exposició, debats).
9. Comunicació escrita (esboços, croquis, redacció).
10. Treball en equip.

A més, es va avaluar el contingut elaborat per l'estudiant a partir de les eines d'avaluació que ofereix el Moodle.

## Conclusions

Els alumnes van descobrir que els diagrames de Voronoi com a models geomètrics són molt fascinants ja que es poden utilitzar gairebé per a descriure casi literalment tot: des de les xarxes de telefonia celular fins a cristalls; a totes les escales des de quants fins a matèria còsmica, fins i tot, sòlids, cubs, tetraedres, etc. A més, aquest projecte ha permès interactuar a tots els estudiants involucrats, fomentant la curiositat i el treball en equip. També, es va demostrar el potencial que tenen les eines informàtiques com a mitjà d'aprenentatge i aprofundiment de conceptes matemàtics aparentment molt abstractes, tot ajudant a l'alumne a entendre millor les relacions entre els punts de l'espai i a practicar tant el dibuix com la capacitat de concentració. A més, els alumnes van relacionar els problemes reals amb continguts molt teòrics que a priori no tenien cap relació.

## Bibliografia

- Geogebra: <http://www.geogebra.org>
- GeomView: <http://www.geomview.org/support/>
- Google SketchyPhysics: <http://code.google.com/p/sketchyphysics/downloads/list>
- Moodle: <http://moodle.com/>
- Programació Didàctica del Departament de Matemàtiques, Institut Font del Ferro, Palafròls. 2009-2010, 2010-2011, 2011-2012.
- Aurenhammer, 1991. "Voronoi Diagrams: A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure", ACM Computing Surveys 23, page 345-405.
- Okabe A, Boots B. and K. Sugihara. 1992. Spatial Tessellations. Concepts and applications of Voronoi diagrams. John Wiley. New York.
- Leandro Tortosa Grau, Universidad de Alicante. IV Jornades de l'Associació Catalana de GeoGebra.